УДК 539.3: 620.1

Козуб Г.А., Козуб Ю.Г.

ПРОБЛЕМЫ И МЕТОДЫ ТЕРМОМЕХАНИКИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Проведено аналіз сучасного стану термомеханіки анізотропних тіл. Наведено огляд різних підходів для дослідження термомеханічних ефектів. Для розв'язання тривимірних задач термомеханіки пропонується метод скінченних елементів.

PROBLEMS AND METHODS OF THERMOMECHANICS OF ANISOTROPICAL SOLIDS

The analysis of present situation in thermomechanics of anisotropic solids is made. Review of different methods for research of thermomechanics effects is presented. The finite element method to solve three-dimensional tasks of thermomechanics is offered.

В различных отраслях современной техники анизотропные материалы нашли широкое применение в качестве новых конструктивных форм и новых материалов, отвечающих возрастающим требованиям надежности, прочности и экономичности проектируемых машин и сооружений, благодаря своим специфическим особенностям. Это вызвано стремлением получить наименьшую материалоемкость изделий при требуемой прочности и жесткости, а также возможностью варьирования свойств композиционного материала за счет изменения структуры армирования. Как правило, большинство композитных сред обладают существенными анизотропными свойствами. Конструкции из этих материалов находят применение в машиностроении, горной промышленности, аэрокосмической технике, сельскохозяйственном машиностроении и других отраслях промышленности в качестве силовых элементов. Применение композиционных материалов в таких конструкциях позволяет повысить их производительность за счет интенсификации технологических процессов, а также долговечность и надежность, уменьшить вибрацию и снизить материалоемкость.

Поведение таких конструкций при переменном или циклическом деформировании является сложным физическим процессом, при математическом описании которого следует учитывать трехмерность напряженно-деформированного состояния, эффекты связанности механических и тепловых полей.

В современных технических конструкциях изготовленных из композитных материалов при их интенсивном нагреве существенное влияние на характер напряженно-деформированного состояния оказывает зависимость физико-механических характеристик от температуры, что, в свою очередь, определяет условия существенного изменения формы, а также условия разрушения конструкции. Температура диссипативного разогрева в конструкциях из композиционных материалов при циклическом деформировании является результатом превращения части механической энергии в тепловую энергию за счет существенного гистерезиса. Она существенно зависит от частоты, амплитуды, характера и длительности нагружения, условий теплообмена, теплофизических и физико-механических характеристик материала.

Действие температурных и силовых полей на конструкции из композитов негативно влияет на их механические и усталостные свойства и является основной причиной их разрушения. Поэтому при проектировании конструкций одной из важнейших проблем является определение связанных полей напряжений и температур. В определенной мере, эта задача может быть решена на основе разработки уточненных двумерных моделей, учитывающих поперечные деформации и позволяющих описать трехмерное распределение температурных полей и компонентов напряженно-деформированного состояния по области слоистой композитной системы, в том числе из термочувствительных материалов. При этом получают преимущества теоретические модели, которые приводят к системам разрешающих уравнений, число и порядок которых не зависит от степени неоднородности конструктивных элементов (оболочек, пластин) и дают возможность в процессе решения определить, как тепловое, так и напряженно-деформированного состояние в слоях, то есть во всех элементах неоднородной структуры. Недостатком такого подхода является необходимость тестирования на основе решений, базирующихся на трехмерных подходах, а также путем сопоставления с результатами экспериментальных исследований.

Анизотропия, слоистый характер, сравнительно низкая прочность и жесткость в направлениях, не совпадающих с направлением армирования, особенности строения вызывают трудности, прежде всего, с установлением прочностных и упругих характеристик. Число определяемых характеристик зависит от типов напряженного состояния и анизотропии [1]. Принципиальным является выбор схем нагружения, при которых характеристики материала наиболее просто связаны с величинами, определяемыми в эксперименте, выбор аналитического аппарата для обработки эксперимента и оценка области применения расчетных зависимостей. Так как в основе расчетных формул лежит аппарат теории упругости анизотропного тела, то необходима оценка погрешности перехода к однородной сплошной анизотропной среде. Число структурных элементов (волокон, слоев препрегов и др.) должно быть достаточным для этого перехода [2].

Термодинамическое обоснование основных уравнений механики взаимосвязанных полей в материалах и элементах конструкций, в том числе и неоднородных, отражено в работах Я.М. Григоренко [3], А.И. Гуляра [4], В.И. Дырды [5], В.Г. Карнаухова [6], В.В. Киричевского, А.С. Сахарова [7], А.Д. Коваленко [8], В.Г. Пискунова [9], Б.Е. Победри [10], В.Н. Потураева [11], T.E. Tay [12], J.R. Barber [13] и др.

Методика исследования термомеханических процессов в кусочно-неоднородных телах, которая базируется на уравнениях термоупругости неоднородного тела и сводится к построению решения граничных интегральных уравнений, разработана в работах В.И. Лавренюка.[14].

Условия термомеханического взаимодействия с матрицей можно представить как обобщение условий упругого взаимодействия на случай влияния температурного поля. Как правило, элементарные термомеханические условия объединяют с простейшими тепловыми условиями [15]. При этом задачи термоупругости сводятся к решению систем сингулярных интегральных уравнений относительно скачков напряжений или перемещений на линии, которая моделирует включения или трещину, в случае, когда правая часть равенства определяется заданными силовыми нагружениями и температурным полем.

При решении задач теплопроводности для тонкостенных систем значительного упрощения можно достичь путем введения различных гипотез о характере распределения температурного поля по толщине конструкции.

Первой появилась гипотеза о линейном распределении температуры, которая была реализована для расчета слоистых конструкций [2]. Эта гипотеза аналогична гипотезе Кихгофа-Лява в механике тонкостенных конструкций и использована для решения задач в работе [16]. В работе [16] разработан операторный метод в нестационарных задачах теплопроводности для тонких пластин совместно с методом усреднения температуры по толщине пластины. Однако полученная система двух дифференциальных уравнений, относительно интегральных характеристик температуры, имеет высокий порядок. Для слоистых конструкций возможно также применение кусочно-линейного распределения температуры аналогично гипотезе ломаной линии для пакета слоев [14]. В этом случае, как и в случае линейного закона, порядок системы уравнений теплопроводности не зависит от количества слоев, и вполне применим для тонкостенных конструкций.

Для более полного описания распределения температурного поля по толщине Э.И. Григолюк и П.П. Чулков [17] применяли полиномиальный закон.

В работе [18] рассмотрен анализ термоупругих напряжений композитных материалов, излагаются теории и методы определения термических напряжений. Математическое обоснование расчета деформирования при воздействии нестационарного и неоднородного по толщине пакета температурного поля многослойных цилиндрических оболочек, а также численного метода дискретной ортогональной прогонки предложено в работах [19].

Тепловое состояние нагреваемых объектов можно определять и экспериментальными методами [5, 20, 21, 22]. Однако получаемая при этом информация является недостаточной для расчета полей термического напряжения, т.к. термометрирование носит дискретный характер и температурное поле не может быть определено в объеме всего тела. К недостаткам экспериментальных методов следует отнести и тот факт, что при измерении возникает искажение температурного поля в местах контакта термопар с поверхностью тела и, в особенности, при попытке определения температуры во внутренних точках тела. Поэтому в большинстве случаев для анализа теплового состояния предпочтение отдается расчетным методам, по сравнению с экспериментальными исследованиями.

К классическим методам решения задач теплопроводности относятся следующие методы: метод разделения переменных (метод Фурье), метод функций Грина, метод тепловых потенциалов и др.

Применительно к слоистым конструкциям при использовании метода Фурье, первоначально определяется совокупность частных решений дифференциального уравнения теплопроводности, а затем составляется ряд из этих решений.

Сущность метода функций источников состоит в том, что любой процесс распространения тепла в теле можно представить в виде суммы процессов выравнивания температур, вызываемых действием множества элементарных количеств теплоты (источников) распределенных в пространстве и времени. Решение для нелинейных задач в слоистых композитах на основе решения в функциях Грина рассмотрены при нестационарных, периодических и стационарных режимах теплопроводности [9].

При использовании перечисленных методов для решения теплопроводности сводились к одномерной постановки задач.

При использовании вариационных методов, решение определяем из условия минимума некоторого функционала [21]. Решение вариационной задачи обычно находится в виде последовательности функций, принадлежащих области определения эквивалентного функционала, минимизирующей этот функционал. Наиболее распространенными методами являются методы Ритца и Канторовича [22]. Суть метода Ритца состоит в отыскании решения в виде ряда по базисным функциям, обладающим свойством полноты и удовлетворяющим граничным условиям задачи [20]. Неизвестные коэффициенты разложения находятся путем минимизации функционала.

Решение задачи теплопроводности методом Канторовича, по сравнению с методом Ритца, более простое и обладает большой точностью.

К преимуществам данного метода следует отнести также то, что структура приближенного решения определяет априори только по одной переменной, а по другим переменным решение полностью соответствует рассматриваемой задаче.

Применяются также методы Трефтца, Био, Лейбензона, Курапка, вариационный принцип Айонолы и др. Подробное описание этих методов, а также применение интегрального преобразования Лапласа и вариационных задач приведено в работах [21, 22].

Проекционные методы или методы взвешенных невязок, применительно к задачам теплопроводности можно разделить на метод коллокаций, метод наименьших квадратов, интегральный метод, метод Галеркина. Эти методы применительно к задачам теплопроводности подробно описаны в [23].

Следует также отметить и некоторые другие аналитические методы решения нелинейных задач, в которых введено понятие термического слоя: метод Швеца, метод Веймена и др. Некоторые аналитические общие и частные методы решения нелинейных задач теплопроводности приведены в [24].

Основным преимуществом аналитического метода является то, что решение получается в общей форме. Оно позволяет определить режим в любой момент времени и для любой точки тела. Для кусочно-неоднородных (слоистых) тел возникают определенные затруднения, связанные с наличием слоев, обладающих различными теплофизическими свойствами. Общий порядок решаемой системы дифференциальных уравнений зависит от количества слоев. Кроме того, аналитические решения применимы для четко ограниченного класса задач. Эти задачи в определенной мере можно назвать классическими. В практике проектирования круг задач значительно шире. Для анализа теплового состояния реальных объектов требуется применение численных методов, позволяющих произвести расчет объекта при заданных тепловых воздействиях начальных и граничных условиях.

Широкое развитие ЭВМ послужило толчком к развитию эффективных численных методов, так как метод конечных разностей, вариационно-разностный метод, метод прямых, метод Монте-Карло, метод конечных элементов (МКЭ), метод граничных элементов.

В первую очередь из численных методов необходимо отметить метод конечных разностей, получивший значительное распространение при решении задач теплопроводности, как и для других задач математической физики.

В основу метода конечных разностей положена идея о замене дифференциальных операторов некоторыми разностными аналогами. В результате приходят к решению систем алгебраических уравнений.

Вопросы аппроксимации, сходимости, точности и устойчивости метода конечных разностей рассмотрены в работах [25]. Следует отметить, что к настоящему времени разработан ряд универсальных программ, ориентированных на решение задач теплопроводности для однородных тел, в основу которых положен метод конечных разностей.

Метод прямых является сочетанием метода конечных разностей по одной координате и аналитических решений по остальным. Данный метод эффективен в отдельных практических задачах для областей простой геометрической формы.

В основе метода Монте-Карло лежит моделирование статистического эксперимента на ЭВМ и регистрация числовых характеристик, получаемых из эксперимента [26].

Среди вариационных численных методов первым стали применять вариационно-разностный метод. Основная идея этого метода – замена производных под знаком интеграла, отвечающего вариационной постановке задачи. Этот метод с успехом применялся для решения сложных задач теплопроводности, термоупругости в работе С.Г. Михлина [22].

Одним из эффективных численных методов, имеющих вариационную основу, является метод конечных элементов. Возникновение и развитие МКЭ обязан в первую очередь работам в области строительной механики.

Применение метода конечных элементов делает возможность проводить расчет на основе более совершенных физических и математических моделей.

Для задач термоупругости этот метод начал развиваться сравнительно недавно, в начале 60-х годов прошлого столетия за рубежом и в 70-х годах на Украине. Большой вклад в его развитие внесли отечественные и зарубежные ученые В.А. Баженов, Д.В. Вайнберг, П.М. Варвак, А.С. Городецкий, А.И. Гуляр, В.Г. Карнаухов, А.А. Квитка, В.В. Киричевский, В.М. Кислоокий, В.Г. Пискунов, Б.Е. Победря, А.С. Сахаров, Н.Н. Блумберг, Р. Галлагер, О.К. Зенкевич, Х. Кеплер, Л. Сегерлинд, Г. Стренг, Дж. Фикс и др. ученые.

Первоначально для оценки теплового состояния двумерных тел наиболее часто применялся треугольный конечный элемент с полилинейным распределением температуры по области элемента. В дальнейшем обоснованность применения данного конечного элемента подтверждена в работе [27], в том числе для конструкций с резко изменяющимися геометрическими и физическими параметрами, а также в нелинейных задачах.

Возможно также применение изопараметрических конечных элементов для оценки теплового состояния конструкций [28]. Вариационно-разностная трактовка метода конечных элементов [22] поставила его в один ряд с другими численными методами решения уравнений математической физики и доказала о том, что решение на основе метода конечных элементов сходится с порядком, определяемым порядком аппроксимации интеграла энергии.

В настоящее время существует несколько подходов к решению нестационарных задач теплопроводности на основе метода конечных элементов. В том случае, когда временной аргумент является параметром вариационных уравнений, применяют метод конечных разностей либо метод Галеркина по временной координате [20, 27]. Для вариационных принципов со сверткой проводят численное интегрирование по временному аргументу. В практических приложениях чаще всего используется семейство двухслойных либо трехслойных временных конечно разностных схем [29].

Для достижения необходимой точности решения задач методом конечных элементов осуществляется сгущение сетки. Сравниваются решения при увеличении числа пространственных элементов и уменьшением шага по времени.

Задачи теплопроводности для тел однородной структуры на основе метода конечных элементов рассмотрены в большом количестве работ. Нелинейные задачи рассмотрены в [7], а вопросы сходимости и устойчивости решений в [30]. Вопросы автоматизации вычислительных процессов при решении задач методом конечных элементов получили освещение в работе [10].

Динамическое поведение и температура диссипативного разогрева вязкоупругого тела вращения при осесимметричном нагружении в нелинейной постановке приведены в работе [18]. Здесь учтена зависимость физико-механических свойств материала от температуры, в частности, комплексного модуля сдвига. Решение на каждой итерации систем линейных уравнений вязкоупругости и теплопроводности производилась методом конечных элементов. Для решения по МКЭ был выбран четырехугольный конечный элемент с квадратичной аппроксимацией, что позволило повысить точность вычислений в области резонанса.

Конечно-элементный метод решения двумерных задач термовязкоупругости при определении действия температурного поля слоистых оболочек вращения с учетом нелинейных эффектов, обусловленных зависимостью напряжений от температуры, дан в статьях [31]. На каждом итерационном шаге решалась линеаризованная задача упругости и теплопроводности.

Другой подход основан на сведении трехмерной задачи теплопроводности к двумерной с помощью каких либо гипотез о распределении температуры по толщине пакета слоев с дальнейшей реализацией двумерной модели методом конечных элементов. Такая методика была использована авторами работ [31] при решении задач теплопроводности для ортотропных и анизотропных [1, 2, 32] слоистых оболочек и пластин. Однако применение такого подхода ограничивается элементами конструкций простой формы.

Существуют также подходы, основанные на синтезе метода конечных элементов и интегральных преобразований [33]. Использование численных методов открывает большие возможности для реализации прикладных моделей расчета неоднородных оболочек и пластин на тепловые воздействия.

Применительно к расчету слоистых конструкций МКЭ целесообразно разрабатывать численные методы с доведением их до программного обеспечения, ориентированного на широкое использование в практике проектирования, хотя наличие слоистой структуры, различие теплофизических характеристик вносит значительные трудности при решении задач теплопроводности.

Проведенный анализ методов решения задач теплопроводности и упругости показал, что для слоистых композитных конструкций практически отсутствуют решения в трехмерной постановке. Методика расчета слоистых анизотропных конструкций нуждается в дальнейшем развитии путем разработки моделей, позволяющих описывать пространственный характер распределения температурных полей. Наиболее перспективным является использование метода конечных элементов, как одного из эффективных численных методов решения задач термоупругости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хорошун Л.П. Определение осесимметричного напряженно-деформированного состояния термочувствительных оболочек вращения методом сплайн-коллокации / Л.П. Хорошун, С.В. Козлов, И.Ю. Патлашенко // Прикладная механика. – 1988. – Т. 24, № 6. – С. 56-63.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин оболочек / С. А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
3. Василенко А.Т. Розв’язання задачі про напружений стан товстостінних циліндричних ортотропних оболонок / А.Т. Василенко, Я.М. Григоренко, Н.Д. Панкратова // Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1974. – № 2. – С. 146-149.
4. Григоренко Я.М. Визначення температурних полів і напружень в неоднорідних анізотропних оболонках у різних постановках / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2003. – 46, № 1. – С. 21-31.
5. Пискунов В.Г. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций / В.Г. Пискунов, В.Е. Вериженко. – К.: Будівельник, 1986. – 176 с.
6. Сахаров А.С. Численное решение задач термоупругого равновесия неосесимметричных тел вращения / А.С. Сахаров, А.И. Гуляр, Г.А. Топор // Прикладная механика. – 1986. – Т. 22, № 6. – С. 7-13.
7. Победря Б.Е. Об обобщенной термодинамике в механике композитов / Б.Е. Победря // Механика твердого тела. – 2004. – № 4. – С. 145-157.
8. Коваленко А.Д. Основы термоупругости / А.Д. Коваленко. – К.: Наук. думка, 1970. – 307 с.
9. Карнаухов В.Г. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении / В.Г. Карнаухов, И.И. Сенченков, Б.П. Гуменюк. – К.: Наук. думка, 1985. – 288 с.
10. Термомеханика эластомерных элементов конструкции при циклическом нагружении / Потураев В.Н., Дырда В.И., Карнаухов В.Г. и др.; под. ред. В. Н. Потураева. – К.: Наук. думка, 1987. – 288 с.
11. Киричевский В.В. Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров / В.В. Киричевский, А.С. Сахаров. – К.: Будівельник, 1992. – 216 с.
12. Tay T.E. Thermomechanical behanical behaviour of composites / Tay T.E., Williams J.F., Jones R. // Compos. Mater. Response: Constitutive Relat. And Damage Mech.: Proc. Workshop, Glasgow, July 30-31, 1987. – London; New York, 1988. – Pp. 49-59.
13. Barber J.R. Thermoelastic contact problems / Barber J.R., Comninon Maria // Therm. Stresses. Vol. 3. – Amsterdam, 1989. – P. 1-106.
14. Лавренюк В.І. Напружений стан кусково–однорідних тіл при дії нестаціонарних теплових полів / В.І. Лавренюк, В.М. Терещенко // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 1997. – 40, № 1. – С. 53-58.

15. Сулим Г.Т. Математична теорія тонких неоднорідностей у термопружному середовищі / Г.Т. Сулим // Змішані задачі механіки неоднорідних структур : матеріали I укр.-польськ. наук. семінару (Львів – Шацьк, 14-19 вер. 1995 р.) – Львів, 1997. – С. 88-93.
16. Подстригач Я.С. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка,1972. – 308 с.
17. Исследование на прочность, разрушение и диссипативный разогрев конструкций из эластомерных и композитных материалов / В.В. Киричевский, Б.М. Дохняк, Ю.Г. Козуб и др. // Збірник наукових праць Луганського сільськогосподарського інституту, Технічні науки. – Луганськ, 1998. – С. 172-177.
18. Козлов В.И. Колебания и диссипативный разогрев многослойной оболочки вращения из вязкоупругого материала / В.И. Козлов // Прикладная механика. – 1996. – 32, № 6. – С. 82-89.
19. Исследование вибрационного разогрева прямоугольной вязкоупругой призмы при циклическом сдвиге / Потураев В.Н., Дырда В.Н., Карнаухов В.Г. и др. // Прикладная механика. – 1976. – Т. 12, № 11. – С. 57-61.
20. Беляев Н.М. Методы нестационарной теплопроводности / Н.М. Беляев, А.А. Рядно. – М.: Высш. шк., 1978. – 328 с.
21. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
22. Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена / Д. Ши – М.: Мир, 1988. – 544 с.
23. Механика композитных материалов и элементов конструкций : в 3 т. / А.Н. Гузь, Л.П. Хорошун, Г.А. Ванин и др. – Киев: Наук. думка, 1982. – Т. 1: Механика материалов. – 368 с.
24. Григоренко Я.М. Застосування скінченних різниць і приграничних елементів в задачі пружності для неоднорідного тіла / Я.М. Григоренко, Э.Г. Грицько, Л.М. Журавчак // Доповіді НАН України. – 1993. – № 4. – С. 49-53.
25. Буткевич Н.Н. Моделирование температурных напряжений в композиционных материалах методом фотоупругости / Н.Н. Буткевич, И.Д. Бумило // Теоретическая и прикладная механика. – 1980. – № 7. – С. 68-71.
26. Сегерлинд И.К. Применение метода конечных элементов / И.К. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
27. Корнеев В.Г. Сопоставление МКЭ с вариационно-разностными методами решения задач теории упругости / В.Г. Корнеев // Известия ВНИИГ. – 1967. – Т. 83. – С. 141-147.
28. Зарубин В.С. Прикладные задачи термопрочности элементов конструкций / В.С. Зарубин. – М.: Машиностроение, 1985. – 269 с.
29. Christensen R.M. A three – dimensional constitutive theory for fiber composite laminated media / R.M. Christensen , E. Zywicz // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1990. – 57, № 4. – Pp. 948-955.
30. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МІРЕЛА+» / В.В. Киричевский, Б.М. Дохняк, Ю.Г. Козуб и др. ; под общ. ред. В.В. Киричевского. – К.: Наук. думка, 2005. – 403 с.
31. Сипетов В.С. Решение в уточненной постановке задачи термоупругости слоистых пластин / В.С. Сипетов, О.Н. Демчук // Математические методы и физико-механические поля. – 1989. – Вып. 29. – С. 25-29.
32. Сипетов В.С. Определение температурных полей в слоистых анизотропных системах на основе метода конечных элементов / В.С. Сипетов, Н.Г. Марченко, Н.В. Вржещ // Известия вузов. Машиностроение. – 1988. – № 8. – С. 17-21.
33. Флячок В.М. Вариационная форма уравнений термоупргости анизотропных оболочек с учетом термомеханического взаимодействия / В.М. Флячок, Р.Н. Швец // Математические методы и физико-механические поля. – 1980. – Вып. 11. – С. 67-71.